

Fréchet'nin Bir Öngörüsü Hakkında

Nurettin Ergun

Marmara University Mathematics Department

1 Kasım 2024

Normlu vektör uzayı kavramını 1905 yılında doktora çalışmasında tanımlayarak, deyim yerindeyse Fonksiyonel Analiz'in başlatıcısı nitelemesine hak kazanan Fransız usta Maurice Fréchet'nin 1928 yılında ortaya attığı fakat kanıtlayamadığı şu ünlü öngörünün, neredeyse 40 yıl boyunca yoğun biçimde uğraşıldıktan sonra 1966 yılında Amerikalı matematikçi Richard D. Anderson tarafından doğruluğu kanıtlanmıştır:

$$l_2 \cong s \quad (1)$$

Burada l_2 ile Matematik'in tartışmasız biçimde en ünlü sonsuz boyutlu ve ayrılabilir Hilbert uzayı olan

$$\left\{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\omega} : (0 \leq) \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \right\}$$

dizi uzayı gösterilmekte, buna karşılık s ile tüm gerçel sayı dizilerinin kümesi olan

$$s = \mathbb{R}^{\omega} = \{ \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathbb{R} (\forall n \in \mathbb{N}) \}$$

yazılmaktadır.

Apaçıktır ki

$$l_2 \subsetneq s = \mathbb{R}^\omega$$

geçerlidir. Bunlar üzerinde, sırasıyla

$$d_{l_2}(\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty) = \sqrt{\sum_{n=1}^\infty |x_n - y_n|^2}, \quad (2)$$

$$d_F(\{x_n\}_{n=1}^\infty, \{y_n\}_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \quad (3)$$

metrikleri tanımlıdır. Bizzat Fréchet tarafından tanımlanan (3) metriğine **Fréchet Metriği** denir. Yukardaki toplamalar

$$\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=1}^\infty \text{ ve } \mathbf{y} = \{y_n\}_{n=1}^\infty$$

dizileri, sözü edilen dizi uzaylarından nasıl alınırsa alınsınlar yakınsaktırlar, yani, sözgelimi $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in l_2$ ne olursa olsun, ünlü Minkowski Eşitsizliği kullanılarak

$$\sqrt{\sum_{n=1}^N |x_n - y_n|^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^N x_n^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^N y_n^2} \quad (\forall N \in \mathbb{N})$$

ve böylece $N \rightarrow \infty$ için limit alıp

$$\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} y_n^2} < +\infty$$

bulunur. Buna karşılık $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in s$ ne olursa olsun

$$0 \leq d_F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

geçerlidir. İşte biz bu yazıda

$$(l_2, d_{l_2}) \text{ ve } (s, d_F)$$

metrik uzaylarının topolojik **eşyapılı** olduklarını kanıtlayacağız. Dikkat edilirse, ilk n adet çarpan kümesi $\mathbb{Q}$ tüm öteki çarpan kümeleri $\{0\}$ olan sayılabilir sonsuz elemanlı

$$A_n = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \dots \times \mathbb{Q} \times \{0\} \times \{0\} \times \{0\} \times \dots (\subseteq l_2 \subseteq \mathbb{R}^\omega)$$

alt kümeleri aracılığıyla tanımlanan

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

kümesi her iki metrik uzayda **yoğundur** sözgelimi $\mathbf{x} \in l_2$ ve $\varepsilon > 0$ verildiğinde

$$d_{l_2}(\mathbf{x}, \mathbf{r}) < \varepsilon$$

gerçekleyen bir $\mathbf{r} \in A$ tanımlamak kolaydır, çünkü

$$\exists n \in \mathbb{N}, R_n(\mathbf{x}) = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k^2 < \frac{\varepsilon^2}{2}$$

gerçekleştiğinden (neden?) ve herbir $1 \leq k \leq n$ için

$$\exists r_k \in \mathbb{Q}, |x_k - r_k| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2n}}$$

geçerli olduğundan, bu belirlenen r_k rasyonel sayıları ve $n \in \mathbb{N}$ aracılığıyla tanımlanan

$$\mathbf{r} = (r_1, r_2, \dots, r_n, 0, 0, 0, \dots) \in A_n \subseteq A$$

elemanı için aşağıdaki geçerlidir:

$$(d_{l_2}(\mathbf{x}, \mathbf{r}))^2 = \sum_{k \leq n} |x_k - r_k|^2 + R_n(\mathbf{x}) < \varepsilon^2.$$

Demek ki bunlar gerçekten ayrılabilir metrik uzaylardır. Dikkat (l_2, d_{l_2}) aslında normlu bir uzaydır, her $\mathbf{x} \in l_2$ için

$$\|\mathbf{x}\|_{l_2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2} = d_{l_2}(\mathbf{x}, 0)$$

bir normdur, oysa (s, d_F) Fréchet metrik uzayı $0 \leq d_F \leq 1$ nedeniyle asla, üzerindeki metriği belirleyen bir normla **donatılamaz**. Şimdi (1) iddiasının kanıtlayabilmek için önce hazırlanmalıyız.

I.Hazırlık

Herhangi bir $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2$ alınsın. Amacımız, dizinin tüm terimleri kümesi olan

$$D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \quad (\subseteq l_2)$$

alt kümesinin l_2 Hilbert uzayında bir σ -tıkız küme olduğunu **kanıtlamaktır**.

$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty$ olduğundan elbette $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ geçerlidir. D dizisinin terimlerini bir çarpım kümesi olarak $\prod_{n=1}^{\infty} \{x_n\}$ biçiminde yazabiliriz. Her $m \in \mathbb{N}$ için

$$H_m = \left[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right] \times \left[-\frac{1}{m+1}, \frac{1}{m+1}\right] \times \dots (\subseteq l_2)$$

tıkız kümeleri aracılığıyla, kolayca $D \in \bigcup_{m=1}^{\infty} H_m (= \sigma\text{-tıkız})$ gözlenir. Eğer $\exists N \in \mathbb{N}$, $0 \leq x_{n+1} < x_n$ ($\forall n \geq N$) koşulu geçerliyse elbette

$$\{x_N, x_{N+1}, x_{N+2}, \dots\} \in \bigcup_{m=1}^{\infty} H_m$$

alt kümeleri kesinlikle **tıkız olmayan** fakat σ -tıkız alt kümelerdir, bunlar l_2 normlu uzayında geçerlidir. Bu koşul eğer gerçekleşmiyorsa, bu kez

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_{n_m} = 0, \quad x_{n_{m+1}} < x_{n_m} \quad (\forall m \in \mathbb{N})$$

koşullarını gerçekleyen bir $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ sıfır alt dizisi kesinlikle **vardır**.

$$D_0 = \{x_{n_m} : m \in \mathbb{N}\} \quad (\subseteq l_2) \quad \text{ve} \quad D_1 = D - D_0 \quad (\subseteq l_2)$$

olmak üzere hem D_0 hem D_1 alt kümeleri l_2 Hilbert uzayında birer σ -tıkız alt küme olurlar (neden?) (Dikkat: Yukarda şu gözlenmiştir:

$0 \in l_2$ vektörü $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ alt dizisinin **biricik** yığılma noktasıdır. Üstelik $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinde indisleme, genelliği bozaksızın **bire-bir** olduğundan sonuçta **her** $m \in \mathbb{N}$ için

$$A_m = \{x_k \in D : x_{n_{m+1}} \leq x_k \leq x_{n_m}\} \subseteq D$$

alt kümesi sonlu elemanlı dolayısıyla **tıkızdır**.)

Böylelikle l_2 uzayında $D = (D_1 - D_0) \cup D_0$ bir σ -tıkız alt küme olur.

Şimdi ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için

$$W_n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\} \times \dots \subseteq l_2$$

alt kümesi tıkız değil, fakat σ -tıkızdır.

Önce gerekli olduğu için şu aracı kümeleri tanımlayalım. Dikkat : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, x_n = 0$ ($\forall n \geq n_0$) koşulunu gerçekleyen bir dizi için apaçık biçimde $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = \sum_{n < n_0} x_n^2 < +\infty$ nedeniyle $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2$ bulunacağı apaçıktır. O halde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$W_n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \times \{0\} \times \{0\} \times \dots \not\subset l_2$$

ve her zaman olduğu gibi $\cong$ işareti ile topolojik eşyapılı olma gereği yazılırsa, kolayca,

$$W_n \cong \mathbb{R}^n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

elde edilir.

Ayrıca

$$W = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n (\subseteq l_2)$$

kümesi l_2 normlu uzayında, bir σ -tıkız (sayılabilir sayıda tıkız kümenin birleşimi olarak yazılabilen) küme, böylelikle bir $\mathcal{F}_\sigma$ kümesidir. Kolayca, herhangi bir $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l_2 - W$ vektörünün, sonsuz sayıda bileşeninin sıfırdan farklı olduğunu özellikle gözleyiniz. Şimdi l_2 normlu uzayında sürekli kullanacağımız,

$$M_1 = \{\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \mathbf{x} \in l_2 - W \text{ ve } x_1 = 1\}$$

$$\tilde{l}_2 = \{\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} : \mathbf{x} \in l_2 - W \text{ ve } \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

alt kümelerini tanımlayalım. l_2 normlu uzayının birim kapalı topu

$$B_{l_2} [\mathbf{0}, 1] = \{\mathbf{x} \in l_2 : \|\mathbf{x}\| \leq 1\} \text{ olmak üzere}$$

$$\partial B_{l_2} [\mathbf{0}, 1] = \{\mathbf{x} \in l_2 : \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

sınır kümesi aracılığıyla (bu sınır, tüm sınır kümeleri gibi kapalıdır, böylece bir $\mathcal{G}_\delta$ türü kümedir) ve kolayca

$$\begin{aligned} \tilde{l}_2 &= (l_2 - W) \cap \partial B_{l_2} [\mathbf{0}, 1] \\ &= \partial B_{l_2} [\mathbf{0}, 1] - W \in \mathcal{G}_\delta \end{aligned}$$

bulunur,

çünkü $E \in \mathcal{G}_\delta$ ve $F \in \mathcal{F}_\sigma$ ise bilindiği gibi $E - F \in \mathcal{G}_\delta$ olur. İşte şimdi bundan sonra, aşağıdaki topolojik eşyapılılık iddialarını göstermek istiyoruz, bunlar kesinlikle hesaplama yapmayı gerektirir:

$$\tilde{l}_2 \cong M_1 \cong l_2 - W \cong l_2 .$$

Not:

$\tilde{l}_2 (\subseteq l_2)$ alt kümesinin **kapalı olamadığı** konusunda Sayın Prof Dietmar Vogt, bizi, aşağıdaki karşı örneği vererek uyarmıştır. Herbir $n > 1$ için

$$\mathbf{x}_n = \left(\sqrt{\frac{n^2 - 2}{n^2 - 1}}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{n^3}, \dots \right) \in \tilde{l}_2$$

vektörleri (dikkat : şunu kolayca gözleyiniz:

$$\|\mathbf{x}_n\|^2 = \frac{n^2 - 2}{n^2 - 1} + \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)^k = 1 \quad (\forall n > 1))$$

üstelik $\mathbf{e} = (1, 0, 0, 0, \dots) \in l_2 - \tilde{l}_2$ dizisi için kolayca

$$\|\mathbf{x}_n - \mathbf{e}\|^2 = \frac{n^2 - 2}{n^2 - 1} + 1 - 2\sqrt{\frac{n^2 - 2}{n^2 - 1}} + \frac{1}{n^2 - 1} = 2 \left(1 - \sqrt{\frac{n^2 - 2}{n^2 - 1}} \right) \rightarrow 0$$

kısacası

$$\mathbf{e} \in \text{kap}_{l_2}(\tilde{l}_2) - \tilde{l}_2 \neq \emptyset$$

geçerli olmaktadır.

II.Kanıtlamalar

Okur, öncelikle şu önemli gözlemi kolayca yapacaktır:

$$\tilde{l}_2 = \left\{ \mathbf{x} \in l_2 : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = \|\mathbf{x}\|^2 = 1 \text{ ve } \sum_{k=1}^n x_k^2 < 1 \ (\forall n \in \mathbb{N}) \right\}$$

O halde, özel olarak, her bir $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \tilde{l}_2$ için $x_1 \neq \mp 1$ geçerlidir (neden ?), dolayısıyla

$$\tilde{l}_2 \cap M_1 = \emptyset$$

kolayca elde edilir. Aslında her bir $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in M_1$ için $1 = |x_1| < \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^2|} = \|\mathbf{x}\|$ yani $1 < \|\mathbf{x}\|$ nedeniyle, kolayca

$$\emptyset = M_1 \cap \partial B_{l_2}[\mathbf{0}, 1]$$

ve $\tilde{l}_2 \subseteq \partial B_{l_2}[\mathbf{0}, 1]$ nedeniyle de $\tilde{l}_2 \cap M_1 = \emptyset$ bulunur. Şimdi önce $\tilde{l}_2 \cong M_1$ gerçeğini elde edelim. Bunun için $\tilde{l}_2$ kümesine ait her bir $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \tilde{l}_2$ vektörünü

$$\mathbf{y}_0 = (-1, 0, 0, 0, \dots) \in l_2 - \left(\tilde{l}_2 \cup M_1 \right)$$

vektöründen M_1 kümesine **izdüşüren**

$$h(\mathbf{x}) = \alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) \mathbf{y}_0 = (\alpha x_1 + (\alpha - 1), \alpha x_2, \alpha x_3, \dots)$$

izdüşüm fonksiyonunu tanımlarsak, $x_1 \neq \mp 1$ ve $y_{0,1} = -1$ bilgilerinden yararlanarak, kolayca $\alpha = \frac{2}{1+x_1}$ belirleyerek

$$h(\mathbf{x}) = \left(1, \frac{2x_2}{1+x_1}, \frac{2x_3}{1+x_1}, \frac{2x_4}{1+x_1}, \dots\right) \in M_1$$

elde edilir, bu fonksiyon apaçık biçimde süreklidir (neden ?). Yazının sonundaki şekle bkz. Peki, herhangi $\mathbf{y} = (1, y_2, y_3, y_4, \dots) \in M_1$ verildiğinde acaba hangi $\mathbf{x} \in \tilde{l}_2$ vektörü için

$$h(\mathbf{x}) = \left(1, \frac{2x_2}{1+x_1}, \frac{2x_3}{1+x_1}, \dots\right) = \mathbf{y} = (1, y_2, y_3, \dots)$$

gerçekleşir? Kolayca, önce norm olarak

$$1 + \frac{4}{(1+x_1)^2} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} x_n^2 = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} y_n^2 = \|\mathbf{y}\|^2,$$

$$\frac{4(1-x_1^2)}{(1+x_1)^2} = \|\mathbf{y}\|^2 - 1 \text{ ve } \frac{1-x_1}{1+x_1} = \frac{\|\mathbf{y}\|^2 - 1}{4},$$

$$x_1 = \frac{1 - \frac{\|\mathbf{y}\|^2 - 1}{4}}{1 + \frac{\|\mathbf{y}\|^2 - 1}{4}} = \frac{5 - \|\mathbf{y}\|^2}{3 + \|\mathbf{y}\|^2} (\neq \mp 1)$$

ve her bir $n \geq 2$ için

$$\frac{2x_n}{1+x_1} = y_n \text{ ve } x_n = \frac{1}{2}y_n(1+x_1) = \frac{4y_n}{3+\|\mathbf{y}\|^2}$$

ve sonuçta $\mathbf{y} \in M_1$ vektörünün biricik orijinalinin

$$h^{-1}(\mathbf{y}) = \left(\frac{5 - \|\mathbf{y}\|^2}{3 + \|\mathbf{y}\|^2}, \frac{4y_2}{3 + \|\mathbf{y}\|^2}, \frac{4y_3}{3 + \|\mathbf{y}\|^2}, \dots \right) \in \tilde{l}_2$$

olduğu anlaşılır, çünkü sonsuz tane n için

$$\frac{4y_n}{3 + \|\mathbf{y}\|^2} \neq 0$$

gerçekleşir, çünkü $\mathbf{y} \in M_1 \subseteq l_2 - W$ nedeniyle sonsuz tane y_n bileşeni $y_n \neq 0$ gerçekseler, üstelik l_2 normlu uzayında

$$\begin{aligned}
\|h^{-1}(\mathbf{y})\|^2 &= \frac{1}{(3 + \|\mathbf{y}\|^2)^2} \left((5 - \|\mathbf{y}\|^2)^2 + 16 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} y_n^2 \right) \\
&= \frac{1}{(3 + \|\mathbf{y}\|^2)^2} \left(25 + \|\mathbf{y}\|^4 - 10 \|\mathbf{y}\|^2 + 16 (\|\mathbf{y}\|^2 - 1) \right) \\
&= \frac{\|\mathbf{y}\|^4 + 6 \|\mathbf{y}\|^2 + 9}{(3 + \|\mathbf{y}\|^2)^2} = 1
\end{aligned}$$

ve böylece $\|h^{-1}(\mathbf{y})\| = 1$ olmaktadır. Sonuç: $h : \tilde{l}_2 \rightarrow M_1$ fonksiyonu bir eşyapı fonksiyonudur. Öte yandan

$$\begin{aligned}
\varphi : M_1 &\rightarrow l_2 - W , \\
\varphi(1, x_2, x_3, \dots) &= (x_2, x_3, x_4, \dots)
\end{aligned}$$

kaydırma fonksiyonu iyi bilindiği gibi bir eşyapı fonksiyonudur, böylece $M_1 \cong l_2 - W$ sonucu kolayca elde edilir. Öte yandan yine R.D.Anderson'a ait 1965 yılında kanıtlanan ve 1967 yılında basılan makaledeki aşağıdaki gerçekten olağanüstü sonuç geçerlidir:

Anderson Teoremi (1967): *Herhangi* bir ayrılabilir X metrik uzayı ve $X \times s$ çarpım uzayındaki herhangi $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ tıkız kümeler dizisi için şu geçerlidir:

$$\left((X \times s) - \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \right) \cong X \times s \quad .$$

Böylelikle X olarak tek noktalı uzay alınırsa, s uzayının herhangi $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ tıkız kümeler dizisi için

$$s - \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \cong s$$

bulunur. Öte yandan Anderson teoremi ile birlikte aşağıdaki ünlü teorem geçerlidir.

Bessaga & Pelczyński Teoremi (1962): $l_2 \cong l_2 \times s$.

Bu sonuç kullanılırsa l_2 uzayının tıkHz herhangi $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi için

$$l_2 - \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \cong l_2$$

ve tüm bu şaşırtıcı sonuçlardan, inanılmaz

$$\tilde{l}_2 \cong l_2$$

sonucu elde edilir. **Dikkat:** Normlu vektör uzaylarının temel bilgisiyle, ”böyle bir uzaydan bir kapalı yuvar çıkartmakla bir nokta çıkartmak işlemleri topolojik olarak **eşdeğerdir**” gerçeği kolayca gözlenir, çünkü $x_0, y_0 \in X$ vektörleri ve $\varepsilon_0 > 0$ sayısı ne olursa olsun

$$h(x) = y_0 + \frac{\varepsilon(1 + \|x - x_0\|)}{\|x - x_0\|^2} (x - x_0) \in X - B[y_0, \varepsilon_0],$$

$$h^{-1}(y) = x_0 + \frac{\varepsilon_0}{\|y - y_0\| - \varepsilon_0} \cdot \frac{y - y_0}{\|y - y_0\|} \in X - \{x_0\}$$

fonksiyonları aracılığıyla ve elbette $B[y_0, \varepsilon_0] = \{y \in X : \|y - y_0\| \leq \varepsilon_0\}$ yazılmak üzere

$$h : X - \{x_0\} \rightarrow X - B[y_0, \varepsilon_0]$$

eşleştirmesi bir **topolojik eşyapı** fonksiyonudur(neden?)!

Şimdi artık son aşamada $\tilde{l}_2$ alt uzayından s içine bir eşyapı fonksiyonu tanımlayacağız. Bunun için herhangi bir $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ alındığında, *herbir* $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^n x_k^2 < 1$ ve böylece $0 < 1 - \sum_{k=1}^n x_k^2$ gerçekleştiğini hiç unutmadan $g(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \in s$ vektörünü, bileşenleri aracılığıyla

$$y_1 = \frac{1 + x_1}{2}, \quad y_n = \frac{x_n + \sqrt{1 - \sum_{k < n} x_k^2}}{2\sqrt{1 - \sum_{k < n} x_k^2}} \quad (\forall n \geq 2) \quad (4)$$

biçiminde tanımlayalım. Dikkat edilirse, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$0 \leq |x_n| < \sqrt{1 - \sum_{k < n} x_k^2}, \quad 0 < x_n + \sqrt{1 - \sum_{k < n} x_k^2}$$

ve böylece $\mathbf{y} = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in \prod_{n=1}^{\infty} (0, 1)_n$ ve

$$x_1 = 2y_1 - 1, \quad x_n = (2y_n - 1) \cdot \sqrt{1 - \sum_{k < n} x_k^2} \quad (\forall n \geq 2) \quad (5)$$

bulunur. g 'nin tüm koordinat fonksiyonları sürekli, böylece g sürekli(neden?). Ayrıca her bir $n \in \mathbb{N}$ için x_n gerçel sayısının $y_1, y_2, \dots, y_n$ bileşenlerinin sürekli fonksiyonu olduğu, sözgelimi, $2y_1 - 1 < 1$ ve

$$x_2 = (2y_1 - 1) \sqrt{1 - (2y_1 - 1)^2} = 2(2y_2 - 1) \sqrt{y_1(1 - y_1)}$$

gerçekleştiği gözlenerek, sonuçta g^{-1} ters fonksiyonun da sürekli olduğu anlaşılır. Üstelik l_2 uzayında $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ ise $\mathbf{y} = g(\mathbf{x})$ ve $\mathbf{y}^* = g(\mathbf{x}^*)$ yazıp, kesinlikle

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, x_{n_0} \neq x_{n_0}^* \text{ ve } x_n = x_{n_0}^* \quad (\forall n < n_0)$$

gerçekleştiğinden, kolayca $y_{n_0} \neq y_{n_0}^*$ böylece $g(\mathbf{x}) \neq g(\mathbf{x}^*)$ elde edilir. O halde g bire-birdir, dolayısıyla

$$g : \tilde{l}_2 \rightarrow g(\tilde{l}_2)$$

bir topolojik eşyapı fonksiyonu, yani $g : \tilde{l}_2 \rightarrow s$ bir gömme fonksiyonudur. l_2 Hilbert uzayı bir tam metrik uzay ve $\tilde{l}_2 \subseteq l_2$ alt kümesi bu metrik uzayda bir $\mathcal{G}_\delta$ türü küme olduğu için ünlü Aleksandrov Teoremi ile **tam metriklenelirdir**, üstelik ayrılabilir ve dolayısıyla aşağıdaki ünlü teorem nedeniyle $g(\tilde{l}_2) \subseteq s$ alt kümesi s metrik uzayında bir $\mathcal{G}_\delta$ türü kümedir.

Teorem: Ayrılabilir ve tam metriklenenebilir her X topolojik uzayı bir **mutlak** $\mathcal{G}_\delta$ ($=$ absolute $\mathcal{G}_\delta$) türü kümedir; kısacası Y metrik uzayı ve $h : X \rightarrow Y$ içine eşyapı fonksiyonu ($=$ gömme fonksiyonu) *ne olursa olsun* $h(X) (\subseteq Y)$ alt uzayı Y uzayında bir $\mathcal{G}_\delta$ türü kümedir.

O halde, her $n \in \mathbb{N}$ için s uzayında kesinlikle var olan $U_n \subseteq s$ açık kümeleri aracılığıyla

$$g\left(\tilde{l}_2\right)=\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \subseteq s=\mathbb{R}^{\omega} \cong \prod_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{i}_{\mathcal{G} \mathbb{R}^1} I_n\right)$$

bulunur, burada her $n \in \mathbb{N}$ için $I_n = [0, 1]$ yazılmış ve ünlü $\mathbb{R}^1 \cong (0, 1)$ bilgisi kullanılmıştır. Oysa apaçık biçimde

$$s \cong \prod_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{i}_{\mathcal{G} \mathbb{R}^1} I_n\right) \subseteq \prod_{n=1}^{\infty} I_n=I^{\omega}$$

geçerli ve

$$I^{\omega}=[0,1] \times[0,1] \times[0,1] \times \ldots$$

Hilbert küpü iyi bilindiği gibi tıkızların çarpımı olarak tıkız, böylece, tıkız-açık=tıkız olduğundan

$$I^\omega - g\left(\widetilde{l}_2\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (I^\omega - U_n) = \sigma\text{-tıkız}$$

olur. Dolayısıyla her bir $n \in \mathbb{N}$ için $K_n = I^\omega - U_n (\subseteq I^\omega)$ kümeleri tıkız ve

$$I^\omega - g\left(\widetilde{l}_2\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$

yazılışı geçerlidir. Şimdi de her $n \in \mathbb{N}$ için

$$J_n = \left[\frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^n} \right] (\subseteq (0, 1)) \quad ,$$

$$F_n = J_n^\omega = J_n \times J_n \times J_n \times \dots$$

tıkız böylece kapalı kümelerini tanımlayalım. Dikkat edilirse

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n} \leq 1 - \frac{1}{2^n} < 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \\ J_n \subsetneq J_{n+1} \text{ , } F_n \subsetneq F_{n+1} \end{array} \right\} (\forall n \in \mathbb{N})$$

ve apaçık biçimde $(0, 1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ geçerlidir. Artık son adımda, Anderson Teoreminin kolayca

$$\tilde{l}_2 \cong g \left(\tilde{l}_2 \right) \cong s \quad (6)$$

sonucunu vereceği aşağıdaki

$$s - \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} F_n \cap K_m = g \left(\tilde{l}_2 \right) \quad (7)$$

eşitliğini göstermek istiyoruz. Oysa sol yan dikkat edilirse

$$s - \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \cap \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m \right] = \left(s - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) \cup g \left(\tilde{l}_2 \right)$$

olduğundan (burada elbette şu gözlenmiştir: Dikkat edilirse

$$\begin{aligned} s - \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m &= s - \left(I^{\omega} - g \left(\tilde{l}_2 \right) \right) = (s - I^{\omega}) \cup \left(s \cap g \left(\tilde{l}_2 \right) \right) \\ &= \emptyset \cup g \left(\tilde{l}_2 \right) \end{aligned}$$

önce aşağıdaki, ciddi hesaplama gerektiren

$$s - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subseteq g(\tilde{l}_2)$$

kapsaması gösterilmelidir.

Gözlem: Herhangi bir $\mathbf{y} = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in s - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ alındığında, dikkat edilirse, $y_n \in (0, 1) (\forall n \in \mathbb{N})$ unutmadan

$$\text{ya } \underline{\lim} y_n = 0 \quad \text{ya da } \overline{\lim} y_n = 1 \quad (*)$$

gerçekleşir; aksi halde, uygun bir $\varepsilon_0 > 0$ sayesinde

$$\varepsilon_0 < \underline{\lim} y_n - \varepsilon_0 < \overline{\lim} y_n + \varepsilon_0 < 1 - \varepsilon_0$$

böylece

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \exists N_0 \in \mathbb{N}, \frac{1}{2^{n_0}} < \varepsilon_0 < y_n < 1 - \varepsilon_0 < 1 - \frac{1}{2^{n_0}} \quad (\forall n \geq N_0)$$

kısacası $y_n \in J_{n_0} (\forall n \geq N_0)$ ve sonuçta önce

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, y_1, y_2, \dots, y_{N_0-1} \in J_{n_1}$$

belirleyip $n_0 + n_1 < m$ doğal sayısı sayesinde $y_n \in J_m (\forall n \in \mathbb{N})$ ve böylelikle

$\mathbf{y} = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in J_m^w = F_m \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ çelişkisi doğardı!

Demek ki, yukardaki (*) iddiası doğrudur. Şimdi sözgelimi $\lim y_n = 0$ olsun. O halde $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = 0 \text{ ve } \lim_{k \rightarrow \infty} |2y_{n_k} - 1| = 1$$

gerçekleyen en az bir $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ alt dizisi **vardır**.

Amacımız sözü edilen $\mathbf{y} = \{y_n\}_{n=1}^{\infty} \in s - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ elemanı alındığında $x_1 = (2y_1 - 1)$ ve

$$x_n = (2y_n - 1) \cdot \sqrt{1 - \sum_{k < n} x_k^2} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

biçiminde bileşenleri, **tümevarımla tanımlanan** $\mathbf{x} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin

$$\text{hem } \mathbf{x} \in \tilde{l}_2 \text{ hem } \mathbf{y} = g(\mathbf{x})$$

koşullarını gerçeklediğini kanıtlamak olacaktır. Dikkat:

$$0 < y_n < 1 \text{ böylece } -1 < 2y_n - 1 < 1 \text{ ve } |2y_n - 1| < 1$$

her $n \in \mathbb{N}$ için doğru olduğundan, aşağıda sol yan doğru **ise**

$$\sum_{k < n} x_k^2 < 1 \Rightarrow \sum_{k < n+1} x_k^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 < 1$$

çıkarsaması kolayca elde edilir, çünkü sol yan doğru ise kökün içi pozitiftir

$$|x_n| = |2y_n - 1| \cdot \sqrt{1 - \sum_{k < n} x_k^2} < \sqrt{1 - \sum_{k < n} x_k^2}$$

ve böylece

$$x_n^2 < 1 - \sum_{k < n} x_k^2 \quad \text{ve} \quad \sum_{k < n+1} x_k^2 = \sum_{k=n}^n x_k^2 < 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

bulunur. Şimdi yukarda belirlenen $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ artan doğal sayılar dizi için, kolayca $x_{n_k} \neq 0 \quad (\forall k \in \mathbb{N})$ ve

$$0 < \sum_{k=1}^{\infty} x_{n_k}^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k^2 \leq 1$$

böylece

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \left(x_{n_k}^2 - \left(1 - \sum_{m < n_k} x_m^2 \right) \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_{m \leq n_k} x_m^2 - 1 \right) = 0$$

ve $n_k < n_{k+1} \quad (\forall k \in \mathbb{N})$ unutmadan, sonuçta

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k^2 = 1$$

bulunur, çünkü aşağıdaki kısmi toplamlar birbirlerini sıkıştırdıkları için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k < n} x_k^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_1}^2 + x_{n_2}^2 + \dots + x_{n_k}^2) = 1$$

geçerlidir(neden?). Bu bulunan sonuçlar istenendir(neden?). Tüm bunlardan ise (7) bağıntısında sol yanın gerçekten $g(\tilde{l}_2)$ tarafından kapsandığı sonucu çıkarırsanız, oysa ters kapsama

$$g(\tilde{l}_2) \cap \bigcup_{m=1}^{\infty} K_m = \emptyset,$$

$$g(\tilde{l}_2) \subseteq s - \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} (F_n \cap K_m) \right)$$

bağıntılarından kolayca elde edilir. Demek ki (7) eşitliği **doğrudur**, böylece Anderson Teoremi sayesinde

$$\tilde{l}_2 \cong g(\tilde{l}_2) \cong s$$

olur ve sonuçta aşağıdaki istenen sonuç çıkar:

$$l_2 \cong \tilde{l}_2 \cong s \quad !$$

III. Sonuç

Bilindiği gibi, **Banach Uzayları**, üzerlerinde tanımlı normun belirlediği metriğe göre birer tam metrik uzay olan vektör uzaylarıdır, buna karşılık **Fréchet Uzayları** ise tam bir metrik ile donanmış, normlanmış olmaları gerekmeyen, yerel dışbükey vektör uzaylarıdır. Böylelikle her Banach uzayı, çok özel ve çok güçlü birer Fréchet uzayıdır. Bilindiği gibi Banach Uzayı *olmayan* Fréchet uzayları **vardır**. s dizi uzayı bunların en ünlülerindendir. Düzlemde açık ve bağlantılı bir $\Omega (\subseteq \mathbb{C})$ bölgesinde tanımlı tüm *holomorfik* fonksiyonların kümesi $H(\Omega)$ bir başka, Banach Uzayı *olmayan* Fréchet uzayıdır.

Fréchet'nin bu yazıda sözü edilen öngörüsünün çözümüne yönelik 40 yıllık çabaların sonunda şu 3 olağanüstü sonuca ulaşılmıştır:

Besseg&Pelczyński Teoremi(1962): Eğer tüm sonsuz boyutlu ayrılabilir Banach uzayları l_2 , dizi uzayı ile (topolojik olarak) eşyapılı **ise**, her sonsuz boyutlu ve $X \neq s$ gerçekleyen ayrılabilir Fréchet uzayı X ile l_2 eşyapılıdır.

Kadec Teoremi(1966): Tüm sonsuz boyutlu ayrılabilir Banach uzayları (topolojik olarak) eşyapılıdır.

O halde, bu yazıda kanıtlanan gerçek ile yukardaki sonuçlardan şu müthiş sonuçlar çıkarsanır:

Anderson Teoremi: Tüm sonsuz boyutlu ve ayrılabilir Fréchet uzayları birbirleriyle (topolojik olarak) eşyapılıdır.

Sonuç: Herhangi bir sonsuz boyutlu ve ayrılabilir Fréchet uzayı, herhangi bir sonsuz boyutlu ve ayrılabilir Banach uzayı ile topolojik olarak **eşyapılır**.

Dikkat edilirse, aşağıdaki üç koşulu gerçekleyen tüm $\mathbf{x} = \{x_\alpha\}_{\alpha < \omega_1} \in \mathbb{R}^{\omega_1}$ gerçekleştirilmiş gerçel sayı dizilerinin kümesi matematikte

$$l_2(\aleph_1)$$

işareti ile yazılır, bu koşullar şunlardır:

$$\mathbf{Koş1:} \exists \Lambda(\mathbf{x}) \subseteq [0, \omega_1) \text{ , } |\Lambda(\mathbf{x})| \leq \aleph_0 \text{ ,}$$

$$\mathbf{Koş2:} \forall \alpha \in [0, \omega_1) - \Lambda(\mathbf{x}) \text{ için } x_\alpha = 0 \text{ ,}$$

$$\mathbf{Koş3:} \sum_{\alpha \in \Lambda(\mathbf{x})} x_\alpha^2 < +\infty$$

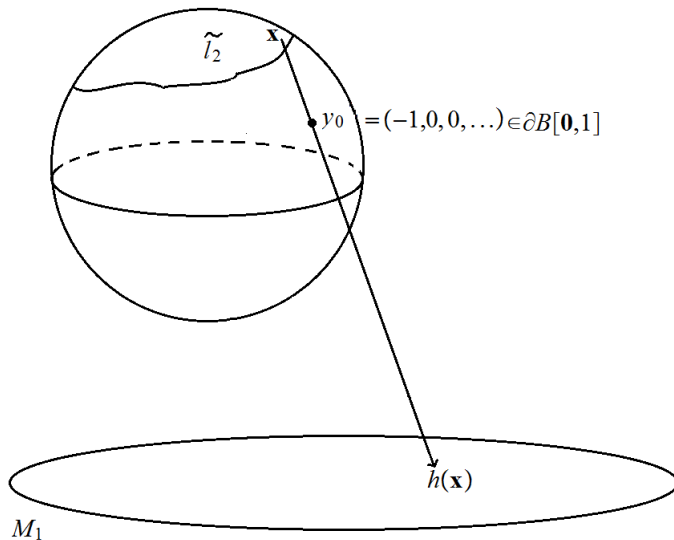
Bu küme, apaçık biçimde $\mathbb{R}$ cismi üzerinde sonsuz boyutlu bir vektör uzayıdır, üstelik

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{\alpha \in \Lambda(\mathbf{x}) \cup \Lambda(\mathbf{y})} x_{\alpha} \cdot y_{\alpha}$$

iç çarpımı sayesinde bir Hilbert Uzayıdır, fakat ayrılabilir **değildir**(neden?). Bunu gözleyebilmek için *biraz* nicel sayı bilgisi bilmek gereklidir!

IV. M_1 üzerine izdüşürme

Kanıtlamalar Kısımında anlatılan izdüşüm fonksiyon:



$$h(\mathbf{x}) = \alpha \mathbf{x} + (1 - \alpha) y_0 \in M_1$$